1. *Version générale du lemme de Gronwall.* On veut montrer que pour $f : (a,b)_t \times \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$ lipschitzienne par rapport à s, et $s(t)$ solution sur (a,b) de $s'(t) = f(t, s(t))$. Si $x : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tel que pour un certain $t_0 \in (a,b)$

$$\|x(t_0)\| = s(t_0) \text{ et } \forall t \in [t_0, b[,\ \|x'(t)\| \leq f(t, \|x(t))\|.$$

Alors pour tout $t \in [t_0, b[$, $\|x(t)\| \leq s(t)$.

   (a) On suppose pour l'instant que l'inégalité est stricte. Montrer que

$$\sup \{t \in [t_0, b[,\ \|x(t)\| \leq s(t)\} = b.$$

   (b) En considérant $f_\varepsilon = f + \varepsilon$, conclure dans le cas général.

2. *Lemme d'Osgood:* On se donne $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

   (a) En supposant que f ne s'annule pas et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

   montrer que la solution maximale du problème de Cauchy $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ est définie sur $]t_0 - T_*, t_0 + T^*[$ où

$$T_* = -\int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} \text{ et } T^* = \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}$$

   (b) En supposant que f ne s'annule qu'en ζ_0, montrer que l'intervalle de définition de la solution maximal de $x'(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ n'est pas majoré si $x_0 < \zeta_0$.

   On suppose maintenant que f est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\int_a^{\infty} \frac{ds}{F(s)} = \infty$$

   et $|f(t,x)| \leq F(|x|)$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. on eut montrer que toute solution maximale de $x'(t) = f(t, x(t))$ est globale. Raisonnons par l'absurde. Soit $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$ et $\sup J < \infty$.

   (c) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|x(t)| \geq 1$.

   (d) Soit $r : t \mapsto |x(t)|$ définie pour $t \in [A, \sup J[$. Montrer que

$$\forall t \in [A, \sup J[,\ r' \leq F(r(t)).$$

   (e) Déduire que x est globale.

3. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1. On suppose que l'EDO

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

admet une fonction de Liapounov $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1, c'est-à-dire une fonction qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0.$$

   (a) Soit (x, I) une solution de l'équation (1). Vérifier que la fonction $t \mapsto V(x(t))$ décroît sur I.

   (b) Soit $x^\star \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre de l'équation (1) - autrement dit un zéro de f. On suppose de plus que V atteint un minimum local strict en $x^\star$, c'est-à-dire qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $V(x^\star) < V(x)$ pour tout x différent de $x^\star$ dans $B(x^\star, r_1)$. Pour tout $0 < r < r_1$, on note $\alpha_r = \min \{V(x), |x - x^\star| = r\}$.

      i. Soit $0 < r < r_1$. Montrer que $U_r = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) < \alpha_r\} \cap B(x^\star, r)$ est un ouvert contenant $x^\star$, et que toute trajectoire issue de U_r reste dans $B(x^\star, r)$.

      ii. Montrer que $x^\star$ est un point stationnaire stable.

   (c) On garde les mêmes hypothèses que dans la question précédente et on suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{x^\star\}, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) < 0.$$

   On va montrer que le point $x^\star$ est asymptotiquement stable.

      i. Soit $0 < r < r_1$. Montrer que le flot $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ de (1) est bien défini sur $\mathbb{R}_+ \times U_r$.

ii. Soit $x \in U_r$. On définit l'ensemble ω-limite $\omega(x)$ du point x de la manière suivante :

$$\omega(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \exists (t_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ t_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,\ \phi_{t_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\to} y\right\}.$$

Montrer que pour tout $y \in \omega(x)$, la fonction $t \mapsto V(\phi_t(y))$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

iii. Montrer que $\omega(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^d : \mathrm{d}V(y) \cdot f(y) = 0\}$ pour tout $x \in U_r$.

iv. Prouver que $\omega(x) = \{x^\star\}$ pour tout $x \in U_r$, et conclure.

Exemple important : si $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, c'est une fonction de Liapounov pour l'EDO donnée par son champ de gradient : $x'(t) = -\nabla g(x(t))$.

4. Pour chacune des EDOs suivantes, dire si le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et si les solutions maximales sont globales en temps positifs et/ou en temps négatifs.

   (a) $x' = \sin(tx)$

   (b) $y' = \mathrm{sh}(y)$

   (c) $z' = z^3$

   (d) $u' = -u^3$

   (e) $v' = \frac{1}{1+v}$

   (f) $w' = |w|^{\frac{3}{4}}$

5. *Explosion ou solutions globales ?*

   (a) Résoudre $x' = x^\beta$ avec $x(0) = x_0 > 0$. Discuter en fonction de la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$ si la solution maximale est globale ou explose en temps fini.

   (b) Même chose avec $x' = x(\ln x)^\beta$. (On pourra utiliser le changement de fonction inconnue $y = \ln x$).

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on considère l'EDO $x' = f(t,x)$.

   (a) Supposons que $xf(t,x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions maximales de l'équation sont globales en temps positifs et admettent une asymptote horizontale.

   (b) Supposons que f est à variables séparées, *i.e.* $f(t,x) = h(t)g(x)$ où h et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et notons x_1 et x_2 deux zéros successifs de g. Montrer que toute solution maximale issue de $]x_1, x_2[$ est globale.